Riccardo Fava

Le proprietà nautiche della carta di Mercatore

Edizioni il Frangente

Indice

Introduzione 5

Richiami di geodesia e di cartografia 10

La proiezione cilindrica centrale 20

Conformità della carta di Mercatore 23

Reticolato geografico e moduli di deformazione 26

Reticolato geografico 26

Moduli di deformazione 27

Lossodromia e Ortodromia sulla carta di Mercatore 30

Lossodromia sulla carta di Mercatore 30

Ortodromia sulla carta di Mercatore 31

Conclusione 34

Ringraziamenti 36

Bibliografia 36

Introduzione

Così come l'antichità ha dato alla nautica la rosa dei venti ed il medioevo la bussola magnetica; i tempi moderni le hanno dato la carta di Mercatore, una carta isogona o conforme, la quale conserva gli stessi angoli che potremmo misurare sulla superficie terrestre. Su questo genere di carta le lossodromie ed i rilevamenti appaiono come linee rette e di facile tracciamento; non a caso Mercatore la creò " ad usum navigantium" .
Reputo utile, ai fini di rendere più completa la trattazione della materia, delineare sinteticamente i passaggi fondamentali della storia della cartografia che hanno preceduto l'introduzione della carta di Mercatore, con la quale la cartografia medesima è assurta alla dignità di scienza.
Fin dall'epoca classica si è intuito che la terra avesse forma sferica, come sferico appariva il Sole, e tra i numerosi tentativi di misurazione della circonferenza terrestre sono degni di nota quello di Dicearco[1] e di Eratostene[2]. Una conseguenza di questa visione del mondo fu la nascita di carte fondate su metodi proiettivi, sulle quali le coordinate utilizzate erano la latitudine e la longitudine, talvolta utilizzate in forma lineare, talvolta in forma angolare, sempre riferite a particolari meridiani e paralleli, come nella nostra attuale concezione. Uno degli esempi più alti di cartografia classica lo abbiamo con Claudio Tolomeo[3], il cui mappamondo fu costruito in proiezione conica, basandosi su di una serie di molti dati di latitudine e longitudine. Tolomeo si riferì spesso ad una particolare proiezione, che fu ideata da Marino di Tiro[4]. Tale proiezione era ottenuta intersecando la sfera con un cilindro secante al parallelo di Rodi (il cosiddetto *diaphragma*; si pensava che esso passasse per Rodi, Messina, le Colonne d'Ercole). La carta ottenuta da questa proiezione verrà chiamata carta piana, ed il metodo di costruzione è utilizzato tutt'ora per alcune applicazioni

---

1 Dicearco (350 a.c-290 a.c) noto filosofo greco che si dedicò anche alla cartografia ed alla descrizione del mondo allora conosciuto. Fu il primo a tentare la misurazione della circonferenza terrestre. (Enciclopedia UTET aa.vv, vol.VI pag.CCCCCLXXXV; Elementi di cartografia A.Selvini, Città studi edizioni, pag.XI).

2 Eratostene (276 a.c-194 a.c) filologo e scienziato greco. Raggiunse la massima fama come cronografo e geografo. Riuscì ad ottenere un valore della circonferenza terrestre molto vicino alla realtà. (Enciclopedia UTET aa.vv, vol.VII pag.CCCCCXXXXII; Storia della nautica I.Capasso, IIM, pag.XI).

3 Claudio Tolomeo (nato a Tolemaide intorno al 100 d.c) noto astronomo, matematico e geografo. Formulò con cura le regole per costruire globi terrestri, e carte geografiche utilizzando metodi proiettivi. (Enciclopedia UTET aa.vv, vol.XX pag.C).

4 Marino di Tiro (vissuto probabilmente nei primi decenni del II secolo d.c) geografo e cartografo, Claudio Tolomeo prese molto dai suoi lavori cartografici. (Enciclopedia UTET aa.vv, vol.XIII pag.XXXXI).

speditive di navigazione che interessano una zona limitata[5]. È consuetudine considerare questa costruzione come un'approssimazione della carta di Mercatore entro una differenza di latitudine di due gradi.

Durante il medioevo si ebbe un generale regresso delle scienze; in questo contesto si fece largo la convinzione che il mondo fosse piatto, nonostante le felici intuizioni dell'epoca classica. Ciò ebbe pesanti conseguenze sulla produzione cartografica. In compenso nell'epoca medioevale si ha il perfezionamento della bussola magnetica[6], che inizierà ad essere utilizzata in navigazione. Questo progresso fondamentale influì anche sulla cartografia, che si basò integralmente su di un sistema di rose graduate sovrapposte. I rapporti commerciali dell'età medioevale favorirono una diffusione delle informazioni raccolte nei *peripli*[7] dai quali si crearono i primi portolani, che si differenziavano dai peripli per la maggiore ampiezza ed accuratezza delle informazioni contenute. Questi portolani erano integrati dalle carte nautiche (dette appunto *carte nautiche portolaniche*), determinate tramite distanze e direzioni reciproche tra punti cospicui. Queste carte avevano la mera funzione di complemento illustrativo ai portolani; non erano perciò fondate su principi matematici. L'orientamento e la navigazione, come preannunciato, avvenivano tramite un fitto reticolato di rose dei venti sovrapposte dai colori vari, per distinguere le direzioni principali da quelle intermedie. La prima testimonianza storica di una carta nautica utilizzata a bordo risale al XIII secolo, quindi potremmo dire che se da un lato in epoca medioevale andarono perse le basi matematiche su cui si fondava la cartografia classica, dall'altro in questo arco di tempo nacque la cartografia nautica propriamente detta, e la carta nautica si vide affiancata alla bussola magnetica ed al portolano, andando a formare una triade di strumenti fondamentale ancora ai nostri tempi.

Nei secoli XV e XVI, periodo in cui fiorirono le spedizioni di scoperta geografica, ed assunse crescente rilevanza il problema della navigazione oceanica; si sentì pertanto l'esigenza di creare una nuova cartografia, data l'evidenza degli errori contenuti dalle rudimentali carte medioevali. Risultava ora indispensabile basare la cartografia su principi

---

[5] Ad esempio si vedano i supporti per il tracciamento delle rette di altezza nella navigazione astronomica.

[6] Nell'epoca medioevale vediamo l'introduzione di due importanti migliorie che contribuirono a dar forma alla moderna bussola magnetica: la sostituzione dell'ago galleggiante con l'ago fissato su di un perno, e l'unione di esso con la rosa graduata. Quest'ultimo perfezionamento è attribuito all'amalfitano Flavio Gioia vissuto all'inizio del XIV secolo. (Enciclopedia UTET aa.vv, vol.IX pag.CCCCCXIV; Storia della nautica I.Capasso, IIM, pag.XVI).

[7] Essi erano una raccolta di notizie risalenti all'epoca fenicia, greca e romana su posizioni, distanze e direzioni dei particolari della costa. (Storia della nautica I.Capasso, IIM, pag.XXI).

matematici, anche per tener conto della curvatura terrestre. Furono riscoperte le metodologie classiche, ereditandone, almeno in un primo momento, anche gli errori. Questo nuovo fiorire della cartografia fu avvantaggiato sia dalla nascita della stampa che dal pensiero filosofico rinascimentale. Dall'antica geografia tolemaica derivarono anche nuove tipologie di carte, come quelle ottenute da proiezione cilindrica, in cui si proietta sulla superficie di un cilindro[8] che è tangente all'equatore della sfera rappresentativa terrestre. Quando il punto di vista coincide con il centro della sfera si parla di proiezione cilindrica centrale. Tal proiezione, di cui tratteremo analiticamente in seguito, è potenzialmente una buona carta nautica, poiché ha un reticolato geografico molto semplice, ma non è isogona. Il primo a comprendere l'esigenza di una carta nautica isogona fu il matematico portoghese Pedro Nuňez[9], che nel 1537 con il *Tratado da sphera* scoprì la vera natura della lossodromia, quella traiettoria che si ottiene governando con angolo di rotta costante. Nuňez capì che la lossodromia non poteva apparire come una linea retta nelle carte nautiche utilizzate all'epoca. Fu così che si aprì il problema cartografico di riuscire ad ottenere una carta isogona, problema che fu risolto da Mercatore[10] qualche decennio più tardi.

Questi nel 1546 scrisse una lettera al cardinale Granvelle, vescovo di Arres, nella quale gli esponeva le sue prime considerazioni sul possibile isogonismo di una carta.

Fu nel 1569 che finalmente riuscì a costruire un grande *mappamondo*[11] introducendo per la prima volta il concetto di latitudine crescente, che sta alla base del concetto di conformità. In pratica, modificando matematicamente la distribuzione dei paralleli della proiezione

---

[8] Sviluppando la superficie del cilindro su un piano si ottiene un reticolato geografico dove meridiani e paralleli appaiono come rette perpendicolari tra loro; i meridiani, a differenza dei paralleli, sono equidistanti tra di loro.

[9] Pedro Nuňez (1492-1577) matematico e cosmografo il quale studiò anche i problemi della navigazione connessi con l'uso della bussola magnetica e per primo teorizzò il concetto di lossodromia; che egli chiamò con il nome *rumbus*, infatti nella terminologia anglosassone la traiettoria lossodromia è detta *rhumb line*. (Enciclopedia UTET aa.vv, vol.XIV pag.CCCCCCCXVIII; Storia della nautica I.Capasso, IIM, pag.XXXVIII).

[10] Gerard Kramer (1512-1594) il cui nome latinizzato è divenuto Mercatore nacque a Rupelmonte nella fiandra orientale e studiò presso l'università di Loviano. Fu costruttore di strumenti astronomici e cartografo di gran fama, tanto da ricevere commissioni dall'imperatore Carlo V. Tra i molti meriti gli è riconosciuto anche quello di aver ridotto molti errori della cartografia classica; ad esempio egli stimò un'estensione in longitudine del Mediterraneo di 53°, rispetto ai 90° stimati di Claudio Tolomeo (in realtà ve ne sono circa 42°). (Enciclopedia UTET aa.vv, vol.XIII pag.CCCCX; Storia della nautica I.Capasso, IIM, pag.XXXX).

[11] Incisione in rame in 18 fogli che Mercatore battezzò col nome *Nova et aucta orbis terrae descriptio*, opera celebre come il primo esempio di proiezione isogona. (Enciclopedia UTET aa.vv, vol.XIII pag.CCCCX).

cilindrica centrale con la legge della latitudine crescente, si ottiene la carta di Mercatore che è isogona. Inizialmente si procedette con un metodo approssimato nel calcolo della latitudine crescente, che fu affinato da vari matematici dell'epoca, tra i quali Edward Wright[12] che per primo pubblicò una tavola delle latitudini crescenti. L'espressione rigorosa si ottenne con il calcolo infinitesimale, ideato da Newton e Leibnitz alla fine del XVII secolo. Verificheremo in seguito la natura analitica della latitudine crescente; tuttavia è interessante far notare come ai tempi di Mercatore e Wright si procedeva alla determinazione della latitudine crescente con il seguente procedimento approssimato, considerando una terra sferica:

$$\varphi_c = \Delta\varphi \sec 0° + \Delta\varphi \sec \Delta\varphi + \Delta\varphi \sec 2\Delta\varphi + ... + \Delta\varphi \sec(\varphi - \Delta\varphi) + \Delta\varphi \sec\varphi =$$
$$\Delta\varphi\left(\sec 0° + \sec\Delta\varphi + \sec 2\Delta\varphi + ... + \sec(\varphi - \Delta\varphi) + \sec\varphi\right)$$ [13]

Con il termine φ_c si indica la latitudine crescente.

Ovviamente più piccolo era il $\Delta\varphi$, migliore era il risultato. Wright costruì le sue prime tavole della latitudine crescente con $\Delta\varphi = 1'$.

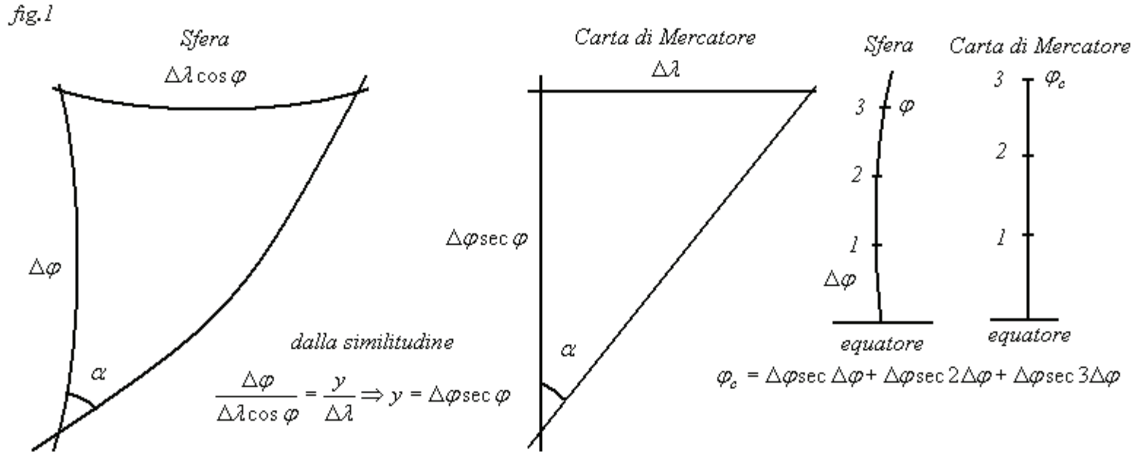
Dal calcolo integrale ricaviamo l'espressione esatta nel caso sferico.

$$\varphi_c = \int_0^{\varphi} \sec\varphi d\varphi \quad \text{poiché} \quad \sum_n d\varphi \sec(nd\varphi) = \int_0^{\varphi} \sec\varphi d\varphi$$

[12] Edward Wright (1560-1615) matematico di Cambridge al servizio della compagnia delle Indie, che nel 1599 pubblicò l'opera *Ceratine errors in navigation detected and corrected* nella quale è anche descritto il procedimento per la costruzione delle prime tavole delle latitudini crescenti. (Storia della nautica I.Capasso, IIM, pag.XXXXIII).

[13] Si considerino due triangoli, uno sulla sfera, l'atro sulla carta di Mercatore, facilmente ricavabili da considerazioni sul reticolato della proiezione cilindrica centrale e sull'appartamento del parallelo. Imponendo la similitudine per ottenere l'isogonismo si ottiene la relazione citata. Si veda a tal proposito la *fig.1*.

fig.1



Questa nuova carta fu originariamente chiamata carta ridotta, probabilmente perché, come vedremo, la distanza tra un parallelo e l'altro era maggiore nella proiezione cilindrica centrale.
La storia considera Mercatore l'ideatore di questa carta isogona, tuttavia in passato si è avuto un dibattito sulla paternità della carta, infatti pare che essa provenga anche dai lavori compiuti da Erhard Etzlaub[14] circa quarant'anni prima.
La diffusione della carta di Mercatore fu inizialmente ostacolata dall'attaccamento alle carte tradizionali; avvenne a partire dal XVII secolo, principalmente ad opera di Inglesi, Olandesi e Francesi, che avevano le principali marine dell'epoca, in maniera comunque limitata, tanto che nel XVIII secolo troviamo ancora vari trattati che illustrano la costruzione di carte nautiche secondo altre metodologie[15].
Livorno fu un importante centro di diffusione della carta di Mercatore nel Mediterraneo, infatti nell'arsenale del Granducato di Toscana fu istituita un'importante scuola cartografica[16] che produceva carte nautiche secondo il metodo di Mercatore.
Le successive scoperte sulla forma della terra, avvenute prevalentemente nel XIX secolo, portarono a non considerare più il nostro pianeta come una sfera e quindi le latitudini crescenti si calcolarono in modo differente. Tuttavia le basi teoriche per una rigorosa costruzione della carta di Mercatore erano già state poste.

[14] Erhard Etzlaub (1462-1532) cartografo. (Elementi di cartografia A.Selvini, Città studi edizioni, pag.XXIII).

[15] Si veda ad esempio *Introduzione all'arte nautica* pubblicao nel 1715 da Girolamo Albrizzi; l'autore descrive e consiglia l'uso delle carte ridotte, ma, essendo esse ancora molto rare, espone i procedimenti di costruzione delle carte tradizionali. (Storia della nautica I.Capasso, IIM, pag.XXXXVI).

[16] Fondata nel 1592 da Vincenzo Volcio e diretta inizialmente da Robert Dudley duca di Northtumberland, eminente navigatore, ingegnere e cartografo. (Storia della nautica I.Capasso, IIM, pag.XXXVII).

Richiami di geodesia e di cartografia

La superficie terrestre ha una forma irregolare che sarebbe impossibile descrivere rigorosamente con forma analitica. La figura geometrica che meglio la approssima è il geoide, definito come la superficie chiusa normale in ogni suo punto alla verticale, quindi alle linee di forza del campo di gravità. Poiché la normale alla superficie di un liquido è orientata secondo la linea della verticale il geoide si ottiene prolungando, anche sotto ai continenti, il livello medio degli oceani, privo di moti ondosi, con densità uniforme, senza considerare le azioni del vento, della corrente, della marea. Il livello medio degli oceani è diverso nei vari punti della superficie terrestre, inoltre il geoide è per definizione una superficie chiusa, quindi esso presenterà inevitabilmente delle ondulazione dette gibbosità.
Occorre notare che il campo della gravità terrestre è formato dalla risultante di due forze.

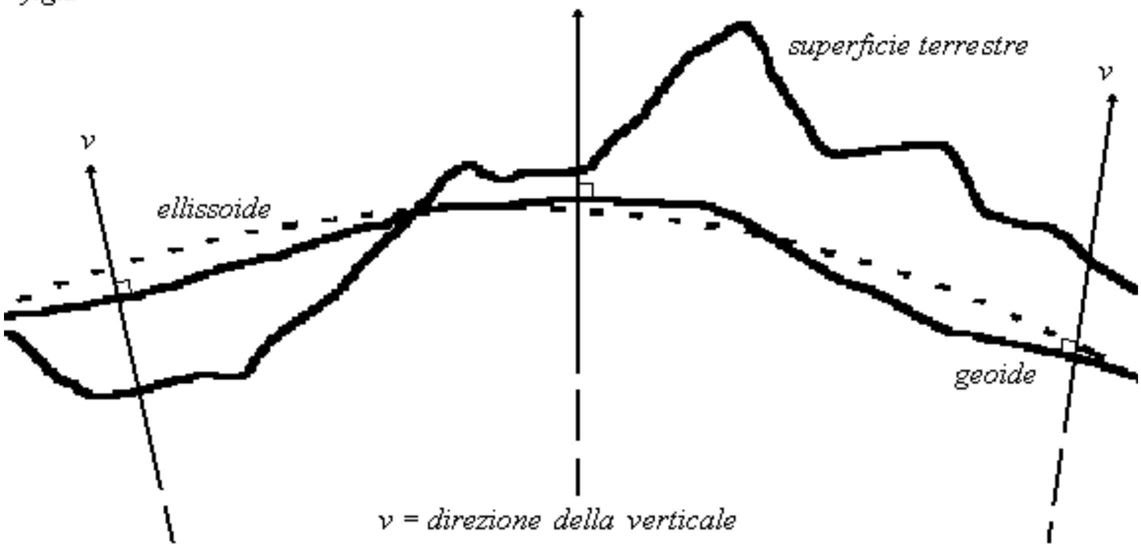
$$\vec{g} = \vec{f} + \vec{c}$$

Qui $\vec{f}$ è la forza di gravitazione Newtoniana, mentre $\vec{c}$ è la forza centrifuga originata dal fatto che la terra è un corpo dotato di velocità angolare.
Pertanto sarà facile definire fisicamente il geoide. Sia $W(x;y;z)$ la funzione potenziale di gravità.

$$W(x;y;z) = W_0$$

Dove W_0 è una costante che mi identifica una superficie di livello a potenziale di gravità costante.

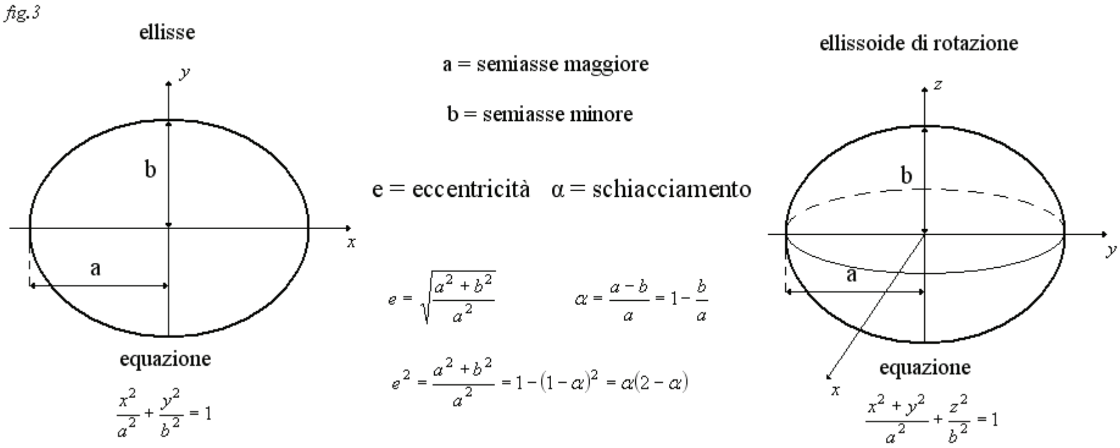
fig.2



Se l'espressione fisica del geoide è relativamente semplice non possiamo dire la stessa cosa per la sua espressione matematica, definita da un insieme di armoniche sferiche.

Per gli studi di geofisica e geodesia il geoide è il solido ottimale per descrivere il nostro pianeta, purtroppo lo stesso non vale per la cartografia. Per poter rappresentare la superficie terrestre su di un piano dobbiamo lavorare su un solido che possa essere sviluppato nel piano e che abbia un'espressione matematica finita e non molto complessa. Semplificando varie armoniche sferiche nell'equazione del geoide otteniamo un solido detto ellissoide di rotazione. Esso si ottiene facendo ruotare di 180° un'ellisse intorno al suo asse minore. Questa figura tiene conto dello schiacciamento dei poli che presenta il nostro pianeta, causato dal suo moto di rotazione.
Da notare che se l'ellissoide ha una forma matematica ben definita, esso non ha una forma fisica definita poiché la nomale alla sua superficie generalmente non coincide con la verticale.

fig.3



A partire dalla metà '800 ci si occupò della misurazione dei parametri dell'ellissoide, condotta con l'osservazione di archi di meridiano[17]. Da queste misurazioni, successive nel tempo e recentemente svolte con l'ausilio dei satelliti orbitanti, sono stati definiti vari ellissoidi di riferimento. Attualmente viene utilizzato prevalentemente il WGS84[18], del quale cito i parametri, che utilizzerò in alcuni grafici più avanti.

$$a = 6378137m \qquad b = 6356752{,}3142m \qquad \alpha = \frac{1}{298{,}2572223563}$$

Consideriamo una terra ellissoidica come da *fig.4*, dove O coincide con il centro di gravità e l'asse minore coincide con l'asse di rotazione.

[17] Nel XIX secolo si vede il fiorire della geodesia propriamente detta, di cui furono pionieri poco prima molti atenei francesi. Le osservazioni di archi di meridiano furono spesso condotte da illustri scienziati i quali dettero alla disciplina grandi contributi, si pensi per esempio al grandissimo matematico Carl Frederich Gauss (1777-1855), illustre professore presso l'università di Gottinga. Sulla scia del nazionalismo e dalla competizione tra atenei furono condotte diverse misurazioni nei vari paesi europei. (Enciclopedia UTET aa.vv, vol.IX pag.CLXIV; Elementi di cartografia A.Selvini, Città studi edizioni, pag. XXVIII).

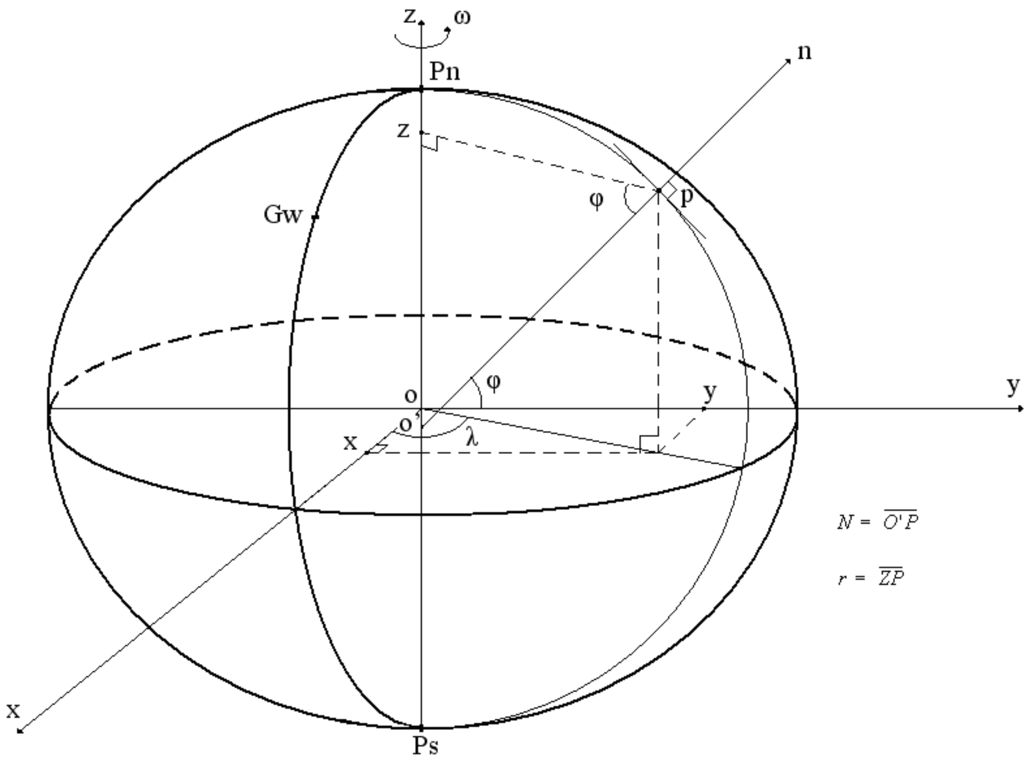
[18] WGS84 *World Geodetic System 1984.*

In O ha origine una terna di rette orientate, che definiscono un sistema di riferimento cartesiano. L'asse x è quello che interseca il meridiano di Greenwich.

Diamo qualche definizione.

- Poli (Pn, Ps): Punti definiti dall'intersezione dell'ellissoide con l'asse di rotazione.
- Equatore: Circonferenza ottenuta intersecando l'ellissoide con un piano perpendicolare all'asse di rotazione e passante per O.
- Paralleli: Circonferenze ottenute intersecando l'ellissoide con un piano perpendicolare all'asse di rotazione, ma non passante per O.
- Meridiani: Archi di ellisse aventi come estremi i due poli, ottenuti intersecando l'ellissoide con un piano che contenga l'asse di rotazione.

fig.4



$p(x;y;z)$ è il generico punto espresso in funzione delle coordinate cartesiane. Ci risulterà utile definire anche le coordinate geografiche (che sono quelle che il navigante si trova a dover utilizzare quotidianamente).

- Latitudine φ: Angolo che la normale in p forma con il piano equatoriale, contato da 0° a 90° con segno N o S a seconda dell'emisfero.
- Longitudine λ: Arco di equatore compreso tra il meridiano Gw ed il meridiano passante per p, si conta da 0° a 180° con segno E o W a seconda della posizione di p rispetto a Gw.

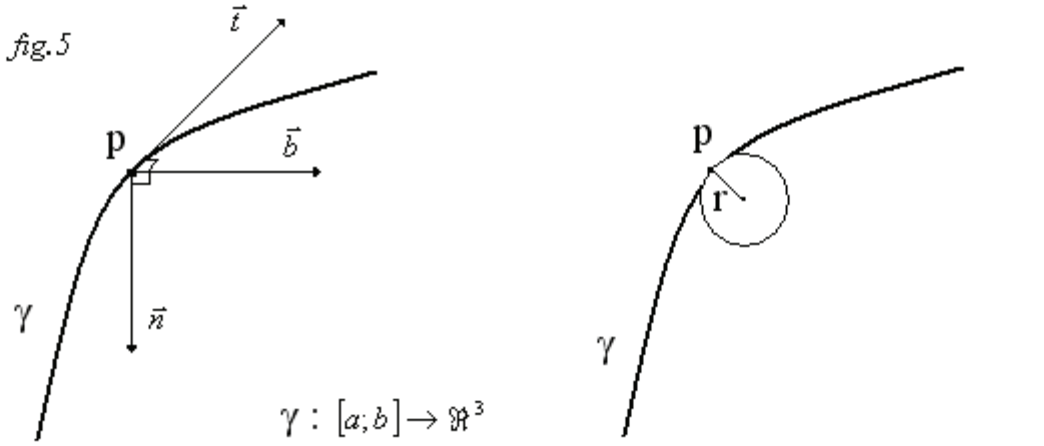
Quindi, senza tener conto della quota, possiamo esprime p in funzione delle coordinate geografiche, $p(\varphi;\lambda)$. Proseguiamo con le definizioni.

- Sezione normale: Curva ottenuta intersecando l'ellissoide con un piano che contenga la normale (si noti che i meridiani sono particolari sezioni normali, ottenute se il piano contiene anche l'asse di rotazione).
- Primo verticale: Il piano normale al piano che origina il meridiano. La curva generata dall'intersezione del primo verticale con l'ellissoide si chiama sezione normale principale.

Consideriamo un punto p sulla superficie dell'ellissoide. Il meridiano passante per p avrà in p un raggio di curvatura ρ; la sezione normale principale in p avrà un raggio di curvatura detto N, chiamato anche *Normale principale* o *Grannormale*.

Per meglio comprendere il concetto di raggio di curvatura sono necessarie alcune brevi nozioni di geometria differenziale, riassunte graficamente in *fig.5*.

fig.5



$\vec{t}$, $\vec{n}$ **è il piano osculatore** **r è il raggio di curvatura di γ in p**

Sia la sfera osculatrice la sfera tangente in p. L'intersezione della sfera osculatrice con il piano osculatore genera la circonferenza osculatrice, il cui raggio è il raggio di curvatura della curva γ in p. Si nota che per le circonferenze (come ad esempio lo sono i paralleli e l'equatore) il raggio di curvatura è costante e coincide con il raggio della circonferenza stessa.

Si può stabilire una relazione tra coordinate cartesiane e geografiche.

$$x = N\cos\varphi\cos\lambda \qquad\qquad y = N\cos\varphi sen\lambda$$

Queste relazioni sono facilmente ricavabili dalla *fig.4*, tuttavia lo stesso non vale per l'espressione di z, che verificheremo rigorosamente poco più avanti.