

Riccardo Fava

**LE ONDE DEL MARE E
LA LORO OSSERVAZIONE**

**DALLA TEORIA CLASSICA
AI MODERNI SISTEMI DI ANALISI**



Edizioni il Frangente

Contenuto

| | |
|--|----|
| Capitolo I Generalità sul moto ondoso | 7 |
| I.1 Introduzione | 7 |
| I.2 Caratteristiche dell'onda | 9 |
| | |
| Capitolo II La teoria classica | 14 |
| II.1 Introduzione | 14 |
| II.2 Le più importanti teorie classiche | 15 |
| II.2.1 La teoria di Airy | 15 |
| II.2.2 Cenni su altre teorie più aderenti alla realtà | 21 |
| II.2.2.1 La teoria di Stokes | 21 |
| II.2.2.2 L'onda solitaria | 23 |
| II.2.2.3 La teoria cnoidale | 24 |
| II.2.3 Campo di applicazione dei modelli | 27 |
| II.3 Considerazioni energetiche | 28 |
| II.4 Propagazione delle onde marine | 31 |
| II.4.1 Rifrazione delle onde | 31 |
| II.4.2 Riflessione delle onde | 32 |
| II.4.3 Stabilità dell'onda e frangenti | 33 |
| | |
| Capitolo III L'analisi spettrale e statistica | 35 |
| III.1 Introduzione | 35 |
| III.2 Generazione delle onde ad opera del vento | 37 |
| III.2.1 Bilancio energetico e regimi di generazione | 38 |
| III.3 Spettri di energia del mare | 40 |
| III.3.1 Spettri in frequenza | 40 |
| III.3.2 Spettri direzionali | 44 |

| | |
|---|-----------|
| III.3.3 Considerazioni sugli stati del mare non stazionari | 46 |
| III.3.4 Gli spettri di energia su profondità finita | 46 |
| III.4 Cenni sull'analisi statistica | 48 |
| III.4.1 Distribuzione delle altezze | 48 |
| III.4.2 Distribuzione dei periodi | 50 |
| III.4.3 Cenni sulla distribuzione di altre grandezze | 51 |
| | |
| Capitolo IV Previsione del moto ondoso | 53 |
| | |
| IV.1 Metodi diretti di previsione | 53 |
| IV.1.1 Boe ondometriche e rete ondometrica nazionale | 53 |
| IV.1.2 Rilievi condotti da satelliti | 57 |
| IV.2 Metodi indiretti di previsione | 58 |
| IV.2.1 Modelli di previsione | 58 |
| | |
| Capitolo V Considerazioni nautiche | 63 |
| | |
| V.1 Considerazioni nautiche sulla propagazione delle onde | 63 |
| V.2 Considerazioni nautiche sullo stato del mare | 65 |
| V.3 Stima del fetch e della durata | 69 |
| V.4 Condotta della navigazione con mare mosso | 70 |
| V.5 Stima visiva dei parametri d'onda | 74 |
| | |
| Appendici | |
| | |
| Al Richiami di matematica | 76 |
| Al.1 Funzioni iperboliche | 76 |
| Al.2 Richiami di statistica applicata alle onde random | 77 |
| Al.3 L'analisi di Fourier | 80 |
| | |
| All Alcuni modelli spettrali predefiniti | 90 |
| All.1 Forme spettrali predefinite per gli spettri in frequenza | 90 |
| All.2 Cenni sui modelli spettrali di propagazione su profondità finita decrescente | 96 |

| | |
|--|-----|
| AIII Cenni storici sui primi metodi di previsione | 98 |
| AIII.1 Nomogramma Dorrestien | 98 |
| AIII.2 Spettri co – cumulatori | 99 |
| AIV Cenni sulle prestazioni delle navi in funzione dello spettro del mare | 103 |
| AIV.1 Introduzione | 103 |
| AIV.2 Generalità sul metodo di procedere | 103 |
| Ringraziamenti | 107 |
| Bibliografia generale | 108 |

Capitolo I Generalità sul moto ondoso

I.1 Introduzione

La superficie marina si presenta sempre perturbata e il movimento oscillante della superficie libera del mare è definito onda. A questa perturbazione è associato un trasferimento prevalentemente orizzontale di energia. Tale fenomeno è generato dall'azione di forze esterne sulla superficie del mare che si riconducono principalmente alla forza del vento, alla forza di marea, alla forza dovuta a movimenti tettonici e infine all'azione di risucchio provocata dall'abbassamento della pressione atmosferica.

Le onde generate da queste forze hanno caratteristiche diverse tra loro. La distinzione principale è fatta in base al rapporto tra lunghezza d'onda e profondità del mare nel quale l'onda si propaga.

Le onde superficiali iniziano a manifestarsi per effetto del vento con piccole increspature della superficie marina dette onde capillari. In questo caso la forza che tende a riportare le particelle d'acqua nella posizione iniziale è la tensione superficiale. Con l'aumentare dell'intensità del vento si formano onde superficiali sempre più grandi dette onde di gravità dove è la stessa gravità che tende a riportare le particelle d'acqua nella posizione iniziale.

Le altre forze generatrici danno vita all'onda lunga. L'onda di marea è generata dall'azione della forza di marea. L'onda di maremoto o tsunami è provocata dalla forza impressa alla massa d'acqua dagli spostamenti tettonici del fondale marino. L'azione di risucchio che esercita una bassa pressione atmosferica sulla superficie marina o di un lago dà vita a una sessa. Le onde lunghe, che hanno generalmente un periodo maggiore delle onde superficiali, hanno lunghezza d'onda paragonabile, se non superiore, alla profondità delle acque interessate all'oscillazione. Da notare che in bassi fondali le onde superficiali possono essere ricondotte anch'esse a onde lunghe.

In questa sede verranno trattate le onde superficiali di gravità generate dal vento, note anche come onde random.

Esse rivestono particolare importanza dal punto di vista nautico perché sono le onde osservate in mare aperto dal navigante. Provocano i movimenti di rollio, beccheggio e imbarcata e per questo la loro stima è indispensabile anche in fase di manovra. Non è trascurabile l'effetto negativo che esse possono esercitare sulla struttura dello scafo e sulle opere marittime in genere. Le onde superficiali provocano inoltre fenomeni erosivi del litorale non trascurabili dal punto di vista geologico e ingegneristico.

Si può quindi capire quanto sia importante la conoscenza fisica di questo fenomeno. Purtroppo lo studio del moto ondoso costituisce uno dei capitoli più complessi dell'oceanografia fisica. Proprio per questo motivo vi si applicano delle semplificazioni generali. Si assume che l'onda sia generata solamente dall'effetto del vento e, a seconda del tipo di analisi effettuata, sono imposte ulteriori semplificazioni al problema.

Dal punto di vista concettuale lo studio delle onde superficiali può essere affrontato in due modi diversi: la teoria classica e l'analisi spettrale e statistica.¹

La teoria classica si propone di studiare il modello matematico che meglio approssima, a seconda dei casi, il profilo superficiale dell'onda, la sua velocità di fase e di gruppo, le traiettorie che descrivono le particelle d'acqua della perturbazione ondosa. Tuttavia questo metodo di studio si presta, peraltro con notevoli difficoltà dal punto di vista matematico, a descrivere il comportamento fisico di una sola onda e non dell'intera perturbazione ondosa. Nonostante questi aspetti, la teoria classica mantiene una propria validità dal punto di vista formale, seppur con varie approssimazioni, visto che molte caratteristiche fisiche osservate del fenomeno² vi sono riconducibili. I modelli più semplici di questa teoria possono essere utilizzati proficuamente, e con relativa facilità, per descrivere in prima approssimazione il comportamento dell'onda in prossimità della costa. Essi sono utili anche come base per le più complete considerazioni energetiche fatte nell'analisi spettrale.

L'analisi spettrale si propone di studiare l'energia connessa all'intera perturbazione ondosa che determina il fenomeno reale. Tuttavia questo metodo di studio non fornisce alcuna informazione sulla singola onda; al più sono possibili considerazioni dal punto di vista statistico.

Se questi metodi di studio non sono sempre validi per lo studio delle onde lunghe, possono essere utilizzati con le approssimazioni del caso nello studio delle onde interne.³

Il vento che genera le onde fornisce alla superficie del mare una grande quantità di energia ed è sempre più attuale la necessità di sfruttarla in modo efficiente. Per esempio, in Giappone già da anni si alimentano segnali luminosi su boe ed opere foranee grazie all'energia delle onde. Tuttavia l'impiego dell'energia elettrica ricavabile con metodi convenzionali è

¹ Storicamente la teoria classica fu il primo metodo di analisi del fenomeno, nonché l'unico utilizzato fino agli anni Quaranta. L'analisi spettrale fu utilizzata per la prima volta durante il secondo conflitto mondiale ad opera di studiosi della US Navy con lo scopo di prevedere lo stato del mare nel Pacifico (*Enciclopedia Utet*, vol. XIV p. CCCCCCCCXX).

² Come, ad esempio, il tipo di traiettoria descritta dalle particelle d'acqua che partecipano alla perturbazione ondosa. [N.d.A.]

³ Le onde interne si formano sulla superficie di contatto tra due masse d'acqua aventi diverse caratteristiche. Esse hanno lunghezza d'onda assai maggiore delle onde superficiali. [N.d.A.]

di difficile impiego, soprattutto a livello industriale. L'inconveniente maggiore è dato dalla variabilità del fenomeno e dalla conseguente difficoltà di immagazzinarne l'energia prodotta. La ricerca energetica sta cercando di risolvere questo affascinante problema.

I.2 Caratteristiche dell'onda

Il vento che spirava sulla superficie del mare genera le onde superficiali. Si definisce fetch la lunghezza dell'area di mare sottoposta all'azione del vento misurata nella direzione e nel verso del vento a partire da dove inizia la sua azione. Vi sono due diversi tipi di fetch:

- 1) *Fetch geografico*: lunghezza associata all'area potenzialmente soggetta all'azione del vento;
- 2) *Fetch efficace*: lunghezza associata all'area effettivamente sottoposta all'azione del vento.

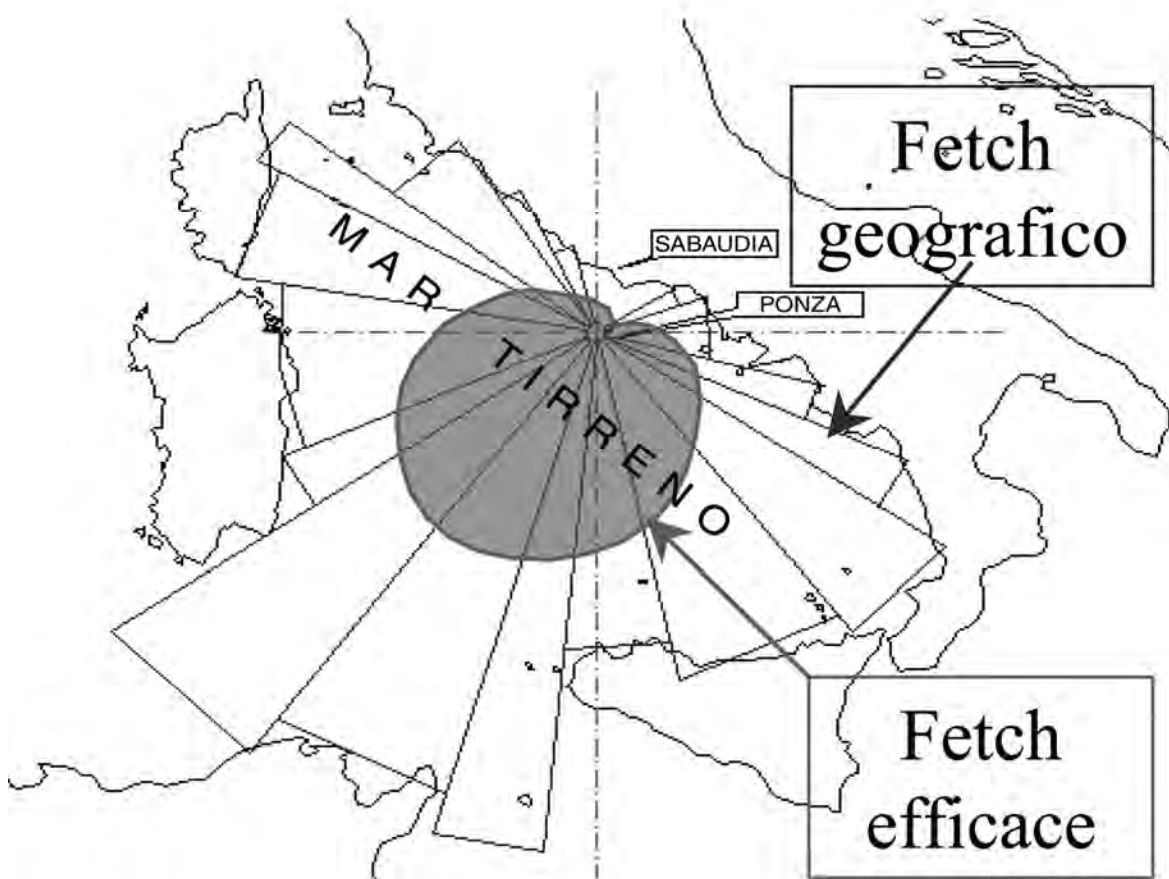


Figura 1. Esempio di distinzione tra fetch geografico e fetch efficace (adattato da Presentazione dell'*Atlante delle onde nei mari italiani*, AIPCN, Roma 26 gennaio 2005).

Nella zona di fetch avviene il trasferimento di energia dal vento al mare. In questa porzione di superficie marina si crea un'insieme caotico di onde dalle differenti caratteristiche che

formano il mare vivo. In terminologia anglosassone questo tipo di mare è detto *sea* oppure *wind sea*.

Cessata l'azione del vento, l'andamento del mare si fa più regolare ed è sempre più facile distinguere il profilo e le caratteristiche di ogni singola onda; queste onde sono onde di mare morto.

L'onda di mare lungo è, invece, quella proveniente da una zona lontana di burrasca. Anch'essa ha un profilo che si distingue visivamente bene. Nel caos del mare vivo si riescono a notare componenti più "energizzate" e stabili che formeranno l'onda di mare lungo allontanandosi dalla zona di fetch.⁴ Le onde di mare lungo e di mare morto sono dette *swell* in terminologia anglosassone.

Se l'energia associata al mare vivo viene determinata con l'analisi spettrale, le caratteristiche della singola onda di *swell* sono descrivibili utilizzando la teoria classica.

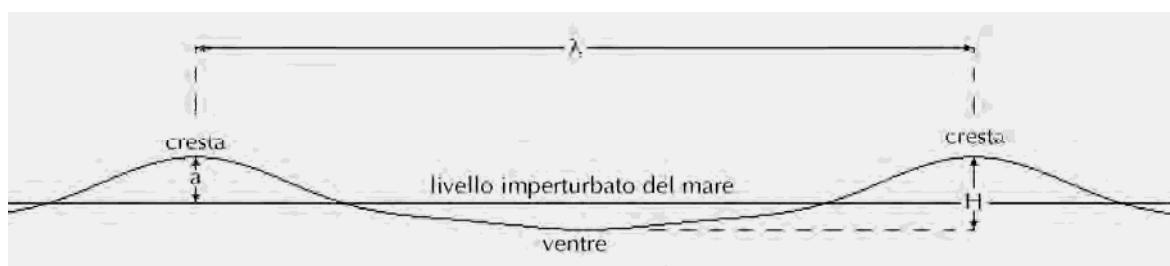


Figura 2. Caratteristiche dell'onda di *swell*.

La distanza verticale tra cresta e ventre è l'altezza d'onda, che si indica con la lettera H. La distanza verticale tra cresta e livello imperturbato del mare è l'ampiezza d'onda, che si indica con la lettera a. La distanza orizzontale tra due creste consecutive⁵ è la lunghezza d'onda, che si indica con la lettera greca λ . Il tempo che una cresta impiega a percorrere una distanza pari alla lunghezza d'onda è il periodo d'onda che si indica con la lettera T. Si definisce fronte d'onda il luogo dei punti caratterizzati dal medesimo stato di oscillazione; convenzionalmente si considerano le creste. La direzione di propagazione è la direzione normale al fronte d'onda.

⁴ Ad esempio si registrano spesso onde di *swell* lungo la costa meridionale della California durante il periodo estivo. Esse si formano nelle intense tempeste invernali a largo dell'Antartide (*Introduction to Physical Oceanography*, R.H. Stewardt, Texas A&M University, cap. XVI).

⁵ La lunghezza d'onda sarebbe in realtà la distanza orizzontale tra due punti consecutivi aventi la stessa fase d'oscillazione. Per convenzione vengono considerate le creste. [N.d.A.]

La velocità con cui si propaga nel tempo una fase di oscillazione è detta velocità di fase. Essa è di conseguenza la velocità con cui si muovono le creste. Analiticamente si definisce come:

$$c = \frac{\lambda}{T} \quad (1-1)$$

La velocità di gruppo è la velocità con cui si propaga l'energia associata all'onda. Essa non sempre coincide con la velocità di fase. La definizione analitica è più complessa e verrà vista più avanti.

La profondità del mare in cui si propaga l'onda è la distanza verticale tra il fondo marino ed il livello imperturbato del mare, indicata con la lettera d .

La ripidità dell'onda è il rapporto tra l'altezza dell'onda e la lunghezza d'onda, si indica con la lettera greca γ :

$$\gamma = \frac{H}{\lambda} \quad (1-2)$$

L'onda di *swell* in mare aperto ha profilo trocoidale.⁶ Il primo ad ipotizzarlo fu Franz Joseph von Gerstner⁷ nel 1802.

La perturbazione ondosa è generata dal movimento delle singole particelle d'acqua che si muovono su orbite approssimativamente circolari.

In mare infinitamente profondo tali orbite si considerano esattamente circolari con raggio decrescente all'aumentare della profondità.

Quando la profondità è finita le traiettorie diventano ellittiche; i semiassi decrescono all'aumentare della profondità mentre l'eccentricità aumenta. In prossimità del fondo l'ellisse degenera in un segmento. Sul fondo vi sarà quindi un movimento essenzialmente

⁶ La trocoide è la curva piana descritta da un punto appartenente al raggio di una circonferenza che rotola, senza strisciare, lungo una retta. Se il punto che genera la trocoide è vicino al centro (e quindi l'altezza d'onda è molto piccola) la trocoide si avvicina molto alla sinusoidale. L'equazione della trocoide è esprimibile in forma parametrica:

$$\begin{cases} x(t) = Rt + r \sin t \\ y(t) = R + r \cos t \end{cases}$$

Dove R è il raggio della circonferenza generatrice, r la distanza del punto che descrive la trocoide dal centro e t il parametro (*Appunti di architettura navale*, S. Miranda, Università di Napoli, p. X; *Oceanografia generale*, G. Trossarelli, Accademia Navale, vol. I, p. CCIII).

⁷ Franz Joseph von Gerstner (1756-1832) ingegnere boemo. Si dedicò all'astronomia e insegnò matematica presso l'università di Praga. Elaborò nel 1802 la prima teoria per descrivere l'onda di mare lungo o di mare morto. Il suo modello era aderente alla realtà, ma escludeva che la velocità potesse avere un potenziale. Per questo alla sua teoria sono preferite quelle di Airy e Sotkes, le quali ammettono il potenziale di velocità. La teoria di Gerstner fu resa nota soltanto nel 1863 (*Encyclopedia by Czechoslovak Academy of Sciences* 1962, aa.vv, vol. II, p. XXV; *Appunti di architettura navale*, S. Miranda, Università di Napoli, p. X; *Fondamenti di oceanologia e idrologia*, F. Mosetti, Utet, p. CCCXXIX).

alternativo delle particelle d'acqua. Questo fenomeno contribuisce alla formazione del tipico andamento ondulato dei fondali sabbiosi in vicinanza della costa.

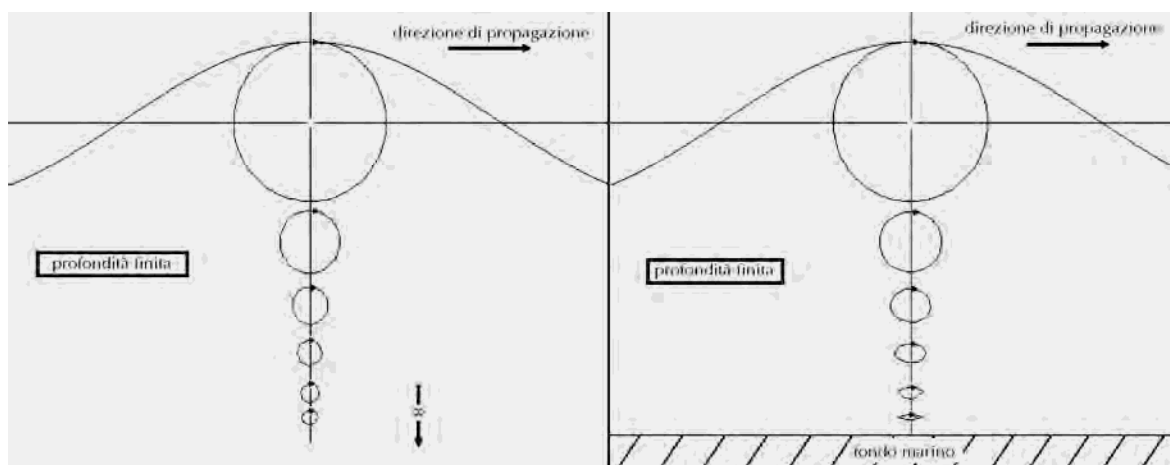


Figura 3. Traiettorie delle particelle d'acqua.

Operativamente si considera una propagazione in mare infinitamente profondo quando il fondale è maggiore della metà della lunghezza d'onda, viceversa si ha la propagazione in mare di profondità finita.

Si osserva che al moto ondoso è associata una corrente di limitata intensità nel verso della direzione di propagazione.⁸ Questo fenomeno avviene perché le traiettorie delle particelle non sono in realtà chiuse. Il vento perturba la superficie marina, ma genera anche una corrente di deriva. Le due correnti si sommano vettorialmente. La corrente risultante non è orientata esattamente nella direzione del vento, ma guardata verso destra nell'emisfero nord, verso sinistra in quello sud.

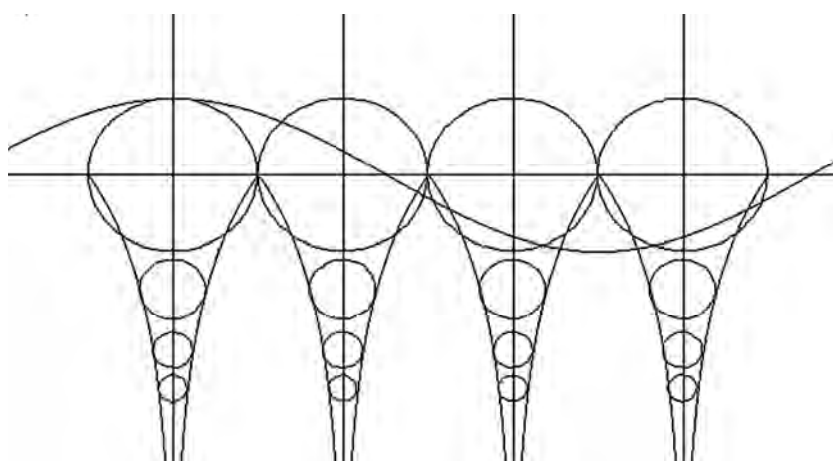


Figura 4. Traiettorie delle particelle in mare infinitamente profondo con involuppo esponenziale dei raggi.

⁸ In realtà il flusso di massa netto è nullo. La corrente nella direzione di propagazione è un fenomeno superficiale compensato da una corrente di verso opposto in profondità (*Introduction to Physical Oceanography*, R.H. Stewardt, Texas A&M University, cap. XVI §II).

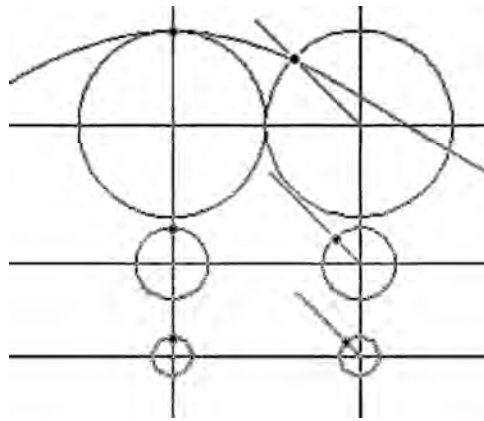


Figura 5. Stato di oscillazione di alcune particelle in mare infinitamente profondo.

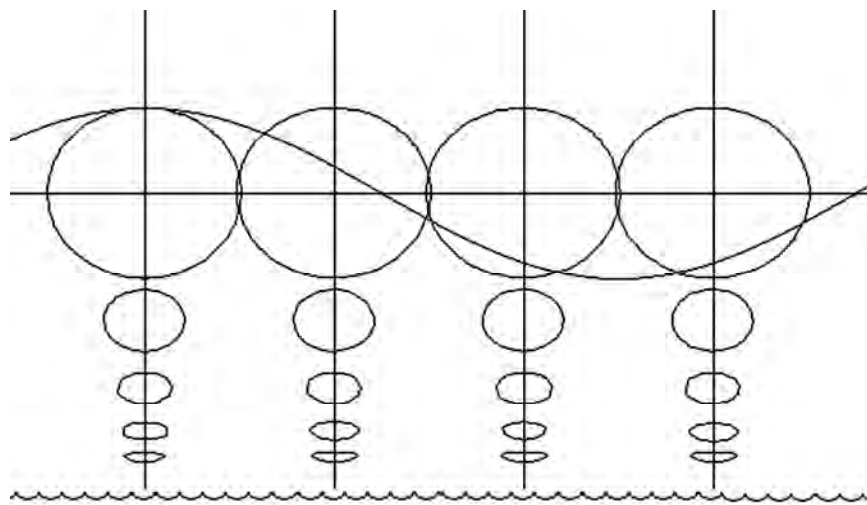


Figura 6. Traiettorie ellittiche in acque poco profonde.

Capitolo II La teoria classica

II.1 Introduzione

La teoria classica si propone di studiare modelli matematici che approssimino il comportamento fisico dell'onda di *swell*. Generalmente tali modelli sono tanto più complessi quanto più si avvicinano alla realtà. La complessità cresce, per esempio, considerando la profondità finita o ridotta. Il loro studio non assume importanza solo in oceanografia fisica, ma anche in fisica.⁹

La teoria classica permette inoltre di effettuare uno studio qualitativo del fenomeno in vicinanza della costa con i metodi dell'ottica geometrica.

I vari modelli matematici si basano sulla risoluzione delle equazioni idrodinamiche¹⁰ con particolari condizioni al contorno.

⁹ Per esempio i modelli dell'onda solitaria e cnoidale sono utilizzati in fisica teorica nucleare (*Il volto degli oceani*, F. Mosetti, Mondadori, p. CLXXXII).

¹⁰ Le equazioni idrodinamiche si ricavano dalla meccanica dei fluidi utilizzata in oceanografia. Essa si basa sulla meccanica newtoniana modificata dall'attuale comprensione della turbolenza. Le equazioni si ottengono dalle forze principali che agiscono sul liquido, trascurandone la viscosità e considerando l'acqua come un liquido incompressibile. Le forze che si prendono in considerazione in oceanografia sono la forza di gravità, la spinta idrostatica, lo sforzo del vento, la forza di Coriolis e la forza di attrito.

Volendo analizzare un punto fisso nello spazio (il cosiddetto metodo di studio euleriano) si complica molto la forma matematica delle equazioni idrodinamiche che da equazioni differenziali lineari a derivate parziali diventano equazioni differenziali non lineari a derivate parziali.

Analizzando il problema in tre dimensioni, assumendo che la velocità della particella d'acqua in un punto sia $\vec{V} = u \cdot \hat{i}_x + v \cdot \hat{i}_y + w \cdot \hat{i}_z$ e ponendo per semplicità $w \ll v$, si ricava il seguente sistema di equazioni differenziali, note anche come equazioni di Navier - Stokes:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega \bar{v} \sin \varphi + F_x \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega \bar{u} \sin \varphi + F_y \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Il termine Ω rappresenta la velocità angolare di rotazione terrestre, g l'accelerazione di gravità, p la pressione e ρ la densità dell'acqua. Il termine φ indica la latitudine. I termini F_x , F_y , F_z rappresentano la forza d'attrito nelle direzioni degli assi cartesiani di riferimento per unità di massa.

Le prime tre equazioni sono dette equazioni del momento in coordinate cartesiane, l'ultima equazione è l'equazione di continuità per fluidi incompressibili. Le equazioni idrodinamiche sono così rappresentate da un sistema di quattro equazioni in quattro incognite: u , v , w , p . Formulazioni più complesse, tralasciate in questa sede per questioni di semplicità, prendono in considerazione anche la viscosità.

La risoluzione è molto difficile. Trascurando le forze di attrito vi sono pochissime soluzioni esatte per i casi più semplici, viceversa non vi sono soluzioni esatte. Anche la risoluzione per via numerica presenta notevoli difficoltà. Per questo motivo è spesso necessaria una forte semplificazione delle equazioni (*Introduction to*

II.2 Le più importanti teorie classiche

Come già preannunciato nel capitolo precedente verranno utilizzate delle ipotesi semplificative generali per tutti i modelli con lo scopo di rendere più semplice l'approccio matematico al problema. In particolare si analizzerà il fenomeno in due dimensioni secondo il sistema di riferimento illustrato in Figura 7. Si assume che l'onda sia generata solamente dall'azione del vento sulla superficie marina.

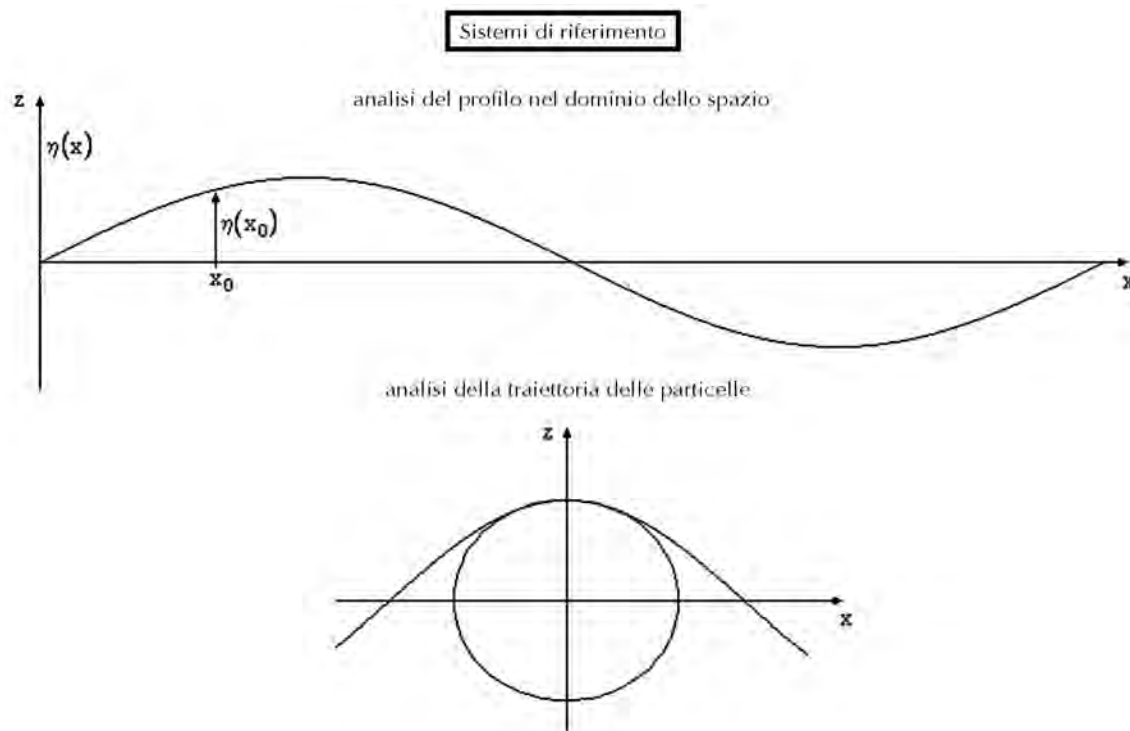


Figura 7. Sistemi di riferimento.

II.2.1 La teoria di Airy ¹¹

La teoria di Airy è fondamentale perché propone un modello semplice per analizzare l'onda di *swell*. Vengono imposte forti semplificazioni nella risoluzione delle equazioni idrodinamiche che rendono il modello poco aderente alla realtà. Convenzionalmente si assume che l'onda di Airy possa approssimare un'onda di *swell* molto smorzata, ormai non più sottoposta all'azione del vento.

Tuttavia l'onda di Airy è spesso utilizzata per stimare indicativamente il comportamento dell'onda in bassi fondali, oppure per fare considerazioni energetiche proficuamente utilizzabili nell'analisi spettrale.

Physical Oceanography, R.H. Stewardt, Texas A&M University, cap. VII §VI §VII §VIII §IX, cap.VIII; *Oceanografia generale*, G. Trossarelli, Accademia navale, vol. I, p. CLXXXVII).

¹¹ Sir George Biddel Airy (1801-1892) astronomo inglese. Insegnò presso l'università di Cambridge e condusse importanti ricerche in campo astronomico, come ad esempio la determinazione della massa di Giove. Condusse importanti studi anche nel campo della gravimetria e dell'ottica (*Enciclopedia Utet*, vol. I, p. CCCLXXXV).

Le condizioni al contorno alle equazioni idrodinamiche nella teoria di Airy sono:

1. La velocità della particella d'acqua ha un potenziale e si muove con moto armonico;¹²
2. Vengono trascurate la forza di Coriolis e la tensione superficiale.
3. Il fluido si considera omogeneo, incompressibile e non viscoso.¹³
4. Fondo liscio, impermeabile e profondità uniforme.¹⁴
5. Si considera che la pressione sia uniformemente distribuita e costante per ogni profondità.
6. Si considera un'onda di pendenza molto ridotta, in particolare si impone la condizione $\frac{H}{\lambda} < \frac{1}{100}$; ne deriva che l'ampiezza d'onda è molto piccola, teoricamente infinitesima;
7. Si rendono le equazioni differenziali lineari.¹⁵

Risolvendo così le equazioni idrodinamiche si ricava la forma del profilo dell'onda:

$$\eta(x; t) = a \sin(\beta x - \omega t) \quad (2-1)$$

Il profilo risulta di forma sinusoidale sia nel dominio dello spazio che nel dominio del tempo.

La frequenza in rad/s è la pulsazione:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (2-2)$$

¹² Se la particella si muove lungo la sua traiettoria con velocità $\vec{V} = u \cdot \hat{i}_x + w \cdot \hat{i}_z$ si definisce la funzione potenziale di velocità ϕ tale che $u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$, $w = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$. Assumendo che il moto sia armonico il potenziale di velocità diventa $\phi = f(z) \cdot e^{j2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)}$. (*Fondamenti di oceanologia e idrologia*, F. Mosetti, Utet, pp. CCCVI e CCCVIII).

¹³ L'assenza di viscosità costituisce una pesante semplificazione dal punto di vista fisico, perché è proprio grazie alla viscosità del liquido che avviene la formazione dell'onda ad opera del vento. Si risolve parzialmente questa incompatibilità del modello considerando che il vento sia ormai cessato (*Il volto degli oceani*, F. Mosetti, Mondadori, p. CLXXXII).

¹⁴ Si impone che la componente verticale w della velocità orbitale sia nulla sul fondo, $-\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=d} = 0$. (*Fondamenti di oceanologia e idrologia*, F. Mosetti, Utet, p. CCCVII).

¹⁵ Si linearizza il problema considerando le velocità u e w tanto piccole da poterle trascurare i quadrati. Infatti la teoria di Airy è detta anche teoria lineare (*Fondamenti di oceanologia e idrologia*, F. Mosetti, Utet, p. CCCVIII; *Introduction to Physical Oceanography*, R.H. Stewardt, Texas A&M University, cap. XVI §I).

Nella (2-2) la frequenza espressa in Hertz è indicata con la lettera f . Si definisce anche la costante di propagazione di fase, o numero d'onda, come:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2-3)$$

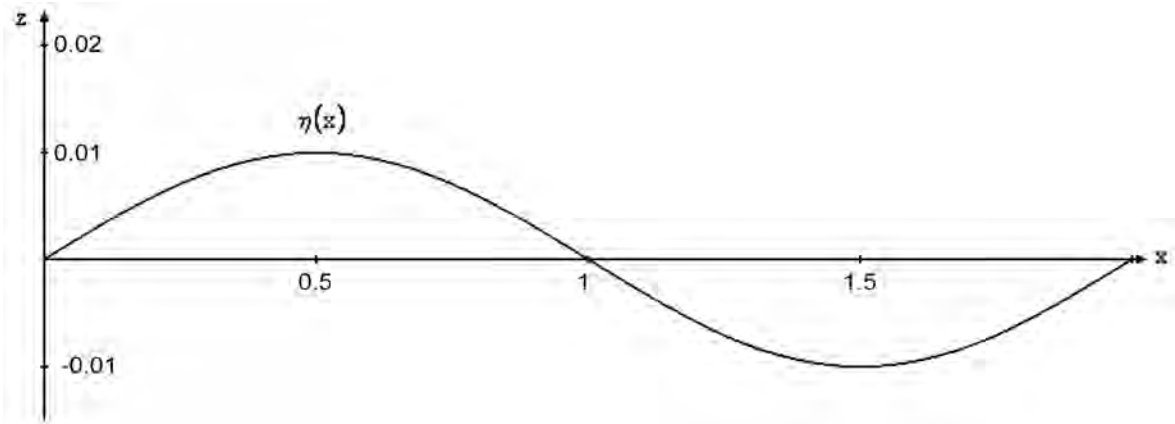


Figura 8. Profilo dell'onda di Airy nel dominio dello spazio al tempo $t = 0$. L'onda ha $a = 0.01\text{m}$ e $\lambda = 2\text{m}$.

Nella teoria di Airy la pulsazione è legata alla profondità ed al numero d'onda secondo la fondamentale relazione di dispersione:¹⁶

$$\omega^2 = g \cdot \beta \cdot \tanh(\beta d) \quad (2-4)$$

Dalla (2-4) si ricava la velocità di fase dell'onda di Airy utilizzando la (1-2) oppure considerando che $c = \frac{\omega}{\beta}$:

$$c = \sqrt{\frac{g}{\beta} \tanh(\beta d)} \quad (2-5)$$

Da cui sostituendo si ricava:

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(2\pi \frac{d}{\lambda}\right)} \quad (2-5\text{bis})$$

oppure:

$$c = \frac{Tg}{2\pi} \tanh\left(2\pi \frac{d}{\lambda}\right) \quad (2-5\text{ter})$$

Come si nota dalla Figura 9, oltre certe profondità la velocità di fase non vi dipende più e si stabilizza su un valore costante, valore massimo della funzione $c(d)$.

¹⁶ Vedi Appendice I §AI.1 per le funzioni iperboliche. [N.d.A.]

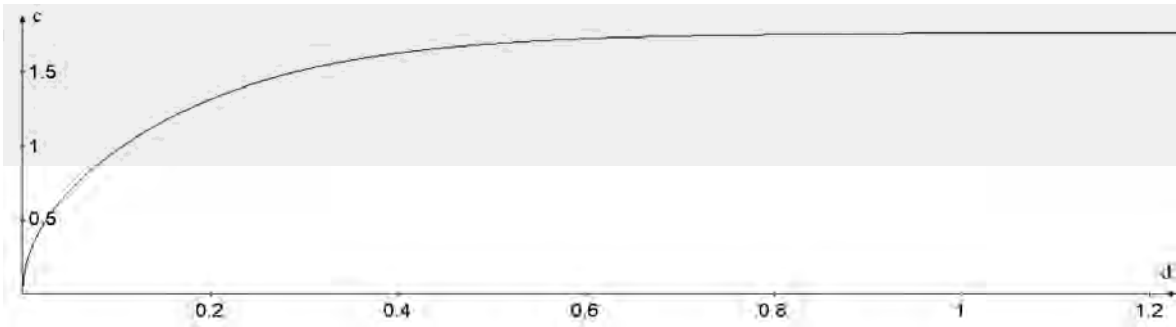


Figura 9. Andamento della velocità di fase al variare della profondità per l'onda sinusoidale descritta in Figura 8.

Nell'onda lunga, come già visto, si verifica la condizione $d < \lambda$. Quindi $\frac{d}{\lambda} < 1$. Imponendo questo nella (2-5bis) si ricava una relazione semplificata per la velocità di fase delle onde lunghe:¹⁷

$$c = \sqrt{gd} \quad (2-6)$$

Analogamente per le onde superficiali si verifica la condizione $d > \lambda$, quindi, al limite, $\frac{d}{\lambda} \gg 1$. Imponendo questa condizione nella (2-5bis) si ricava l'espressione della velocità di fase per le onde superficiali:¹⁸

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (2-7)$$

La (2-6) indica che, assumendo il modello di Airy, la velocità di propagazione delle onde lunghe dipende solamente dalla profondità del mare in cui si propagano. Questa relazione può essere utilizzata per avere una stima indicativa della velocità di propagazione di uno tsunami. Si comprende così come l'onda di maremoto, per la quale è verificata la condizione delle onde lunghe, attraversi vasti e profondi oceani in poche ore.

La (2-7) indica che per le onde superficiali, assumendo il modello di Airy, la velocità di fase è indipendente dalla profondità e dipende dalla sola lunghezza d'onda. Questa relazione può essere utilizzata per avere una stima della velocità delle onde superficiali che si propagano in mare aperto.

Le condizioni imposte per ottenere la (2-6) e la (2-7) dalla (2-5bis) costituiscono dei casi limite; è quindi necessaria una zona di interregno dove l'unica espressione valida resta la (2-5bis).

¹⁷ Poiché per piccoli valori dell'argomento la funzione tangente iperbolica tende all'argomento stesso. [N.d.A]

¹⁸ Poiché la funzione tangente iperbolica tende ad uno quando l'argomento tende all'infinito. [N.d.A]